

Solovay モデルにおける無限組み合わせ論的対象

神戸大学 大学院 システム情報学研究科 システム情報学専攻

丹野俊将 (Toshimasa TANNO) *

概要

集合論において、選択公理の成り立たない ZF のモデルにおける組み合わせ論的対象については長くから研究されており、特にそのようなモデルの中で代表的なものが Solovay モデルである。本発表では Solovay モデルにおける直線構造や有向集合について得られた結果を説明する。特に、有向集合間の関係 (Tukey 関係) を導入し、その関係を用いて Solovay モデルにおける実数の性質に関連するいくつかの有向集合について調べた。

1 導入

1.1 公理的集合論, 選択公理

はじめに (公理的) 集合論の背景を概覧する。集合論の研究は、19 世紀後半の Cantor に端を発する。彼は実数直線 $\mathbb{R}$ についての解析的研究の中で、 $\mathbb{R}$ と自然数全体 ω の間に全単射が存在しない、すなわち $\mathbb{R}$ が非可算集合であることを証明した。この論文の最後に Cantor は以下の主張が成り立つと予想した。ここでの濃度とは集合論の言葉で定式化される無限集合の大きさである。

Definition 1.1. 連続体仮説 (Continuum Hypothesis) CH とは、「 $\mathbb{R}$ の任意の部分集合は可算であるか、 $\mathbb{R}$ と等しい濃度を持つ」という主張である。

Cantor は連続体仮説を証明できなかったが、これは証明が困難であるというよりもっと本質的な問題があることがその後の研究で明らかになる。Gödel と Cohen それぞれの結果によって、連続体仮説は集合論の公理系 ZFC から独立であることが示された。ここである命題 ϕ が公理系から**独立**であるというのは、その命題 ϕ もその否定 $\neg\phi$ も公理系から証明できないことを意味する。

Zermelo-Fraenkel の公理系と呼ばれる集合論の公理系 ZF、特に ZF に選択公理 AC (Axiom of choice) を加えた公理系 ZFC は現代数学のほとんどを記述する表現力を持つため、現代数学の標準的な形式体系と捉えることができる。その一方で、連続体仮説のように素朴な主張であっても、無限集合の大きさや性質についての言明のうちで ZFC から独立なものは数多く存在する。

公理的集合論では、様々な $ZF(C)$ のモデルを調べることで $ZF(C)$ から独立な命題たちが互いにどのような関係にあるかを研究する。その中でも実数に関係する無限集合の濃度についての命題たちは、中心的な話題の一つである。

* E-mail: 211x503x@stu.kobe-u.ac.jp

選択公理 AC とは、空でない集合の族からの元の選択を同時に行うことを認める公理であり、ZF と独立な命題である。選択公理は集合論において重要な役割を果たす公理であり、特に大きな帰結として「順序数によって集合の大きさ (濃度) を適切に定義できる」ことと「正則性 (振る舞いの良い性質) を持たない実数の集合が存在する」ことを導く。

Definition 1.2. 選択公理とは次の命題である： 任意の空でない集合 X に対して選択関数、すなわち任意の $x \in X \setminus \{\emptyset\}$ に対して $f(x) \in x$ が成り立つ関数 $f: X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \bigcup_{x \in X} x$ が存在する。

Theorem 1.3 (ZF). 選択公理から次が従う。

1. 任意の集合 X に対して、ある順序数 α からの全単射 $f: \alpha \rightarrow X$ が存在する。
2. 実数の集合であって、Lebesgue 可測性 (Baire の性質, 完全集合の性質) を持たないものが存在する。

選択公理の成り立たない ZF のモデルとして代表的なものの一つが、Solovay モデルである。

Definition 1.4. 到達不能基数 κ と V 上の $\text{Coll}(\omega, < \kappa)$ -ジェネリックフィルター G に対して、 $V[G]$ の中で V の元と $\mathbb{R}^{V[G]}$ の元から遺伝的定義可能である集合全体 $\text{HOD}_{V \cup \{\mathbb{R}^{V[G]}\}}^{V[G]}$ を κ についての Solovay モデルと呼ぶ。

Solovay モデルでは任意の実数の集合が正則性を持つ。このことから選択公理は成り立っていないことがわかるが、一方で実解析などの数学を展開する上で十分な程度の選択公理のフラグメントが成り立っている。

Theorem 1.5. 到達不能基数についての Solovay モデルにおいて、次が成り立つ。

1. 任意の実数の部分集合が Lebesgue 可測性, Baire の性質, 完全集合の性質を持つ。
2. 従属選択公理 (DC) が成り立つ。すなわち、空でない集合 X とその上の全域二項関係 R に対して、任意の $n \in \omega$ について $x_n R x_{n+1}$ を満たす X 上の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ が存在する。

1.2 基数不変量

(連続体の) **基数不変量**とは、実数の構造から定義可能な集合の濃度であって、典型的には可算無限 $\aleph_0$ と連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ の間の値を取る。代表的な基数不変量と ZFC におけるその関係は以下の Cichon' の図式にまとめられている。 $X \rightarrow Y$ は $X \leq Y$ が ZFC から証明可能であることを意味する。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{cov}(\mathcal{N}) & \rightarrow & \text{non}(\mathcal{M}) & \rightarrow & \text{cof}(\mathcal{M}) & \rightarrow & \text{cof}(\mathcal{N}) & \rightarrow & 2^{\aleph_0} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathfrak{b} & \rightarrow & \mathfrak{d} & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \aleph_0 & \rightarrow & \text{add}(\mathcal{N}) & \rightarrow & \text{add}(\mathcal{M}) & \rightarrow & \text{cov}(\mathcal{M}) & \rightarrow & \text{non}(\mathcal{N})
 \end{array}$$

ここで $\mathcal{M}$ は実数の瘦集合、すなわち疎集合の可算和で表される部分集合 (meager set) 全体、 $\mathcal{N}$ は実数の Lebesgue 測度 0 の部分集合 (null set) 全体を表す。

例えば, $\text{cof}(\mathcal{M})$ (cofinality of $\mathcal{M}$) は次で定義される量である.

$$\text{cof}(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{F}| \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \text{ such that } \forall Y \in \mathcal{M} \exists Y \in \mathcal{F} (X \subseteq Y)\}$$

前述の連続体仮説が成り立たないモデル, すなわち $\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間に無限基数が存在するモデルにおいてはこれらのどの値が等しく, どの値が分離されているのかは非自明な問題となる. この分離については非常によく研究されており, ZFC で証明可能な関係以外は全て別の値に分離可能であることが知られている (Cihon's Maximum).

1.3 順序集合

基数不変量の多くは実数に関する順序集合に関連した量として定義される. 特にいくつかは有向集合の共終数として定義される.

Definition 1.6. 順序集合 $(P, \leq_P)$ が**有向集合**であるとは, 任意の $p, q \in P$ に対して $p, q \leq_P r$ となる $r \in P$ が存在することをいう.

Definition 1.7. 順序集合 $(P, \leq_P)$ について $X \subseteq P$ が**共終的 (cofinal)** であるとは任意の $p \in P$ に対して $q \in X$ が存在して $p \leq_P q$ となることをいう.

Definition 1.8. 順序集合 $(P, \leq_P)$ について P の**共終数** ($\text{cof}(P)$) とは, P の共終的な部分集合の中で最も濃度の小さいものの濃度である. これを $\|(P, \leq_P)\|$ と書く.

例えば上に挙げた $\text{cof}(\mathcal{M})$ は有向集合 $(\mathcal{M}, \subseteq)$ の共終数である.

そのため, 基数不変量の間の関係を研究する上で, その基数に対応した順序集合の間の共終部分を比較することが重要であり, このために重要な概念として **Tukey 関係** という概念がある.

Definition 1.9. 順序集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について D が E に **Tukey 還元可能** であるとは, D から E への関数であって任意の D の非有界な部分集合の像が E の非有界部分集合となるものをいう. これを $D \preceq_T E$ と書く. $\preceq_T$ によって生成される同値関係を $\equiv_T$ と書く.

Lemma 1.10 (ZFC). 順序集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について, $D \preceq_T E$ ならば $\|(D, \leq_D)\| \leq \|(E, \leq_E)\|$.

Theorem 1.11 (ZFC). 有向集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について, $D \equiv_T E$ であることと, D と E の両方を共終的に埋め込める有向集合が存在することは同値. 特に $D \equiv_T E$ ならば $\|(D, \leq_D)\| = \|(E, \leq_E)\|$.

$\equiv_T$ による有向集合上の同値類を**共終型**という.

2 主定理

選択公理のない ZF の元では一般に集合の濃度を比較することができない. そのため基数不変量のような無限が成す様相を把握するためには, 対応する順序集合の構造を調べる必要がある. 定理 1.11

によって ZFC の元で Tukey 関係は有向集合の共終部分集合の関係を表現する概念であるといえるが、一方でこの定理の証明には選択公理を必要とする。よって Tukey 関係は ZF のモデルにおいては共終型を表現するために適当な道具ではない。発表者は Tukey 関係を一般化した概念 (**pre-Tukey 関係**) を導入し、それが ZF において有向集合の共終型を表現するものであることを示した。

Definition 2.1. 順序集合 $(P, \leq_P)$ に対して、その完備化 $(P^*, \leq_{P^*})$ を、 $\leq_P$ について上向きに閉じている P の空でない部分集合に包含の逆で順序を定めた順序集合とする。

Definition 2.2 (pre-Tukey 関係). 順序集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について、 D が E に **pre-Tukey 還元可能** であるとは $D \preceq_T E^*$ であることをいい、これを $D \preceq_T^* E$ と書く。 $\preceq_T^*$ が生成する同値関係を $\equiv_T^*$ と書く。

Theorem 2.3 (ZF). 有向集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について、 $D \equiv_T^* E$ であることと、 D と E の両方を共終的に埋め込める有向集合が存在することは同値。

特に Solovay モデルにおいて、基数不変量に対応するいくつかの有向集合の間で pre-Tukey 関係が成り立たないことを示した。 $(\omega^\omega, \leq^*)$, $([\mathbb{R}]^\omega, \subseteq)$ は ZFC の元で $\|(\omega^\omega, \leq^*)\| = \mathfrak{d}$, $\|([\mathbb{R}]^\omega, \subseteq)\| = 2^{\aleph_0}$ が成り立つような有向集合である。

Theorem 2.4. 到達不能基数についての Solovay モデルにおいて、次の関係が成り立つ。ただし $D \rightarrow E$ は $D \preceq_T^* E$, $D \dashrightarrow E$ は $D \not\preceq_T^* E$ を表す。

$$(\omega^\omega, \leq^*) \xrightarrow{\quad} (\mathcal{M}, \subseteq) \xrightarrow{\quad} (\mathcal{N}, \subseteq) \xrightarrow{\quad} ([\mathbb{R}]^\omega, \subseteq)$$

$\dashleftarrow$ $\dashleftarrow$ $\dashleftarrow$

すなわち、pre-Tukey 関係に関してこれら 4 つの有向集合が異なる共終型を持つことを示した。

参考文献

- [1] Bartoszynski, Tomek, and Haim Judah. Set Theory: on the structure of the real line. AK Peters/CRC Press, 1995.
- [2] Solovay, Robert M. "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable." Annals of Mathematics 92.1 (1970): 1-56.
- [3] Tukey, John W. Convergence and uniformity in topology. Princeton University Press, 2016.